

AJ-1209

B.A./B.Sc. (Part-III) Term End Examination, 2021-22

MATHEMATICS (Paper-I)

Time : 3 hours]

[Maximum Marks : 50

नोट— सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल करें।

Note : Attempt all questions. All questions carry equal marks. Attempt any two parts from each question.

इकाई-I / Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए—

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(b) आबिल परीक्षण का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।
State and prove Abeli Test.

(c) फलन $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$ को फुरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए तथा दर्शाइये कि—

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Find the Fourier series of the function $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$. Hence deduce that

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

इकाई-II / Unit-II

2. (a) डारबू प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Darboux theorem.

(b) यदि फलन $f:[a, b] \rightarrow R$ एकदिष्ट है, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[a, b]$ में रिमान समाकलनीय है।
If $f:[a, b] \rightarrow R$ is monotonic function then prove that f is Riemann Integrable in the interval $[a, b]$.

(c) समाकल $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए, जबकि a शून्य से बड़ा है।

Test the convergence of the integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ where $x > 0$.

इकाई-III / Unit-III

3. (a) यदि $f(z)$, z का एक विश्लेषिक फलन है, सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 2|f'(z)|^2$$

[P.T.O.]

If $f(z)$ is an analytic function of z , then prove that $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|Rf(z)|^2 = 2|f'(z)|^2$

(b) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $a > -1$ है।

Evaluate the integral $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ if $a > -1$ with the help of differentiation of parameter.

(c) समाकल $\int_0^1 x^{n-1} \log x dx$ के लिए अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the integral $\int_0^1 x^{n-1} \log x dx$.

इकाई-IV / Unit-IV

4. (a) दर्शाइये कि $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, R पर एक दूरीक है।

Show that $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ is a metric on R .

(b) सिद्ध कीजिए कि, किसी दूरीक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत होता है।

In a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

(c) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that, every Cauchy sequence in a metric space is bounded.

इकाई-V / Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय है।

Prove that a metric space is first countable.

(b) विस्तार प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension theorem.

(c) सिद्ध कीजिए कि एक सम्पूर्ण तथा परिबद्ध दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Prove that a complete bounded Metric space is countably dense.